数理解析研究所講究録
第 1540 巻 2007 年 13-28

‘Secondary Thom polynomial’定式化の試みについて

近畿大学理工学部　佐久間一浩 (Kazuhiro Sakuma)
Department of Mathematics,
Kinki university

1. 序

$f:M\to N$ を C^∞ 級多様体の間の C^∞ 級写像とするとき，点 $x\in M$ での微分 $df_x:TM_x\to TN_{f(x)}$ が単射，または全射になるとき，その点を写像 f の**正則点**といい，そうでない点を**特異点**という．すなわち，写像 f の特異点とは

$$\mathrm{rank}\, J_f(x)<\min(\dim M,\dim N)$$

を満たす点である．ここで，$J_f(x)$ は写像 f の点 $x\in M$ におけるヤコビ行列を表す．また，f の特異点全体からなる集合を $S(f)$ で表し，f の**特異点集合**という．ところで，C^∞ 級写像として，ある意味で‘良い’ものを選ぶと多様体の構造が特異点集合の構造によく反映されることが知られている．逆に，特異点集合の構造から多様体の情報を読み取ることも可能である．こうした観点から多様体の研究を進める方法論を（写像の）**『大域的特異点論』**という．しからば，非退化な特異点しかもたない C^∞ 級関数（モース関数）$f:M\to\mathbb{R}$ を通して多様体 M の構造を調べる**「モース理論」**は，‘関数の大域的特異点論’といえよう．

多様体の間の C^∞ 級写像 $f:M\to N$ に現れる特異点集合の大域的配置を表すものに **“Thom 多項式”** の概念 ([51],[19]) がある．Thom 多項式とは，やや大雑把に言うと，与えられた特異点型の集合の閉包が表すホモロジー類のポアンカレ双対を特性類（Stiefel-Whitney 類 w_i，さらに特異点集合に co-orientation が定義されるときは Pontrjagin 類 p_i あるいは複素多様体の間の写像のときは Chern 類 c_i）の多項式で表したものであり，写像や多様体の選び方には依存せずに定まることが知られている．R. Thom 自身はこれを **“モース不等式の一般化”** と呼んだ．素朴な見方をすれば，Thom 多項式が消えていなければその特異点は写像をどう変形しても消せないことが結論できる，といういわゆる障害類としての役割を Thom 多項式は担っているといえる．一方，安藤良文は Thom 多項式があるジェット拡大の primary obstruction と見なせるという立場を初めて確立し，その応用として Thom 多項式の計算と特異点集合の消去可能性問題を併せて考察した ([2, 3] 参照).

ここでの我々の問題意識は次の問いに基づいている（[43],[5]）:

> **“C^∞ 級多様体の間の C^∞ 級写像 $f:M\to N$ が与えられたとき，f に滑らかにホモトピックで，かつある型の特異点をもたないような写像が存在するか？”**

この問題は，f を被覆するようなある対応するジェット拡大 j^rf のリフトの存在問題と同値であり，本来ホモトピー論の範疇で捉えられる問題である．すると Thom 多項式は，対応するジェット拡大の primary obstruction として捉えられる．加えて，リフトの存在問題を論ずるためにはジェット束 $J^r(M,N)$ のある部分束として定義されるあるファイバー束 $\Omega^r(M,N)$ のファイバーのホモトピー型を決定する必要があり，これ自体難しい問題であるが，最近になって安藤 [4] により 2 次ジェットのレベルでファイバーが正則点の芽と折り目特異点の芽をもつものに対して決定された．さらに安藤は，その結果を踏まえて，折り目写像（定義 3.1 参照）の存在に関する‘ホモトピー原理’（§ 5 参照）を与えた．

さて，generic な C^∞ 級写像 $f:M\to N$ でさえ，そこに現れる特異点集合の配置は一般に大変複雑で，たとえある型の特異点の Thom 多項式が消えていても特異点集合の定義域多様体への実現（特異点集合が部分多様体であるときにはその埋め込み）の仕方は決して自明で

あるとはいい難い．低次元の多様体間の写像でもその複雑さは顕著で，例えば，任意の結び目は C^∞ 級写像 $f: S^3 \to \mathbb{R}^2$ に現れる特異点集合として実現できることが知られている（佐伯の定理 [39]）．したがって，たとえ Thom 多項式が求まったとしても特異点集合の実現の仕方の複雑さを捉えるには，その情報はまだ不十分と言える．

本稿では安藤による "Thom 多項式がジェット拡大の primary obstruction と見なせる" という立場をさらに深めて，ジェット拡大を拡張するための高次の障害類を考察することを提案する．だが，3 次以上の高次の障害類を決定するという問題は，ホモトピー論的にも一般に大変難しいことが経験的に知られている．しかしながら，特異点集合の配置の複雑さは高次の障害類の中により明確に反映されていることだろう．そこで，まず手始めに secondary obstruction が非自明に現れる実例が実際にあることを示し，（可能ならば）これを与えられた特異点型の **"secondary Thom polynomial"** として定式化できる可能性について，安藤のホモトピー原理に基づき**「折り目写像の存在問題」**を中心に考察することにする．そもそも折り目写像の存在問題は，ホモトピー論との関わりが深く，J. Mather が 'Manifolds-Amsterdam 1970' において提出した問題（[28]）

"ホモトピー群 $\pi_n(S^p)$ $(n \geq p)$ の任意の元は折り目写像を含むか？"

はまさにホモトピー論と写像の特異点論の接点に位置する基本問題である．

ここで問題の背景を説明しよう．よく知られているように，任意の連続写像は C^∞ 級写像で近似できるので，任意のホモトピー類の中でできるだけ '良い' 性質をもつ C^∞ 級写像の存在，言い換えればできるだけ特異点をもたない C^∞ 写像の存在を問うのは自然な発想と言える．例えば，$\pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$ の生成元には Hopf 写像（Hopf fibration）という特異点をもたない C^∞ 級沈め込み写像 (submersion) が含まれる．しかし，生成元以外の無限個の元は fibration のような non-singular な写像を含まないので，必然的に特異点が現れる．球面 S^n が S^p 上のファイバー束構造をもつような次元対 (n,p) はごく限られていることに注意する．Mather はできるだけ fibration（すなわち，submersion）に近い写像として，折り目写像[1)]を選び，一般のホモトピー群の元で実現されるか否かを問うたのである．一般にホモトピー群 $\pi_n(S^p)$ そのものを決定するのは難しい状況から，Mather の問題の完全解決は遠い未来に残されるであろうと思われていたかもしれないが，Y. Eliashberg が問題提起後 2 年足らずで，自身の工夫による**ホモトピー原理**に基づき肯定的解決を与えることに成功した．多様体上の折り目写像の存在問題は，これ以後本論に入ることになる．R. Thom による "Thom 多項式はモース不等式の一般化" という立場に乗っ取れば，折り目写像の存在問題はモース理論の一般化の一つであり，いわば**「写像のモース理論」**と呼べる枠組みの中で捉えられるものであろう．この解説文は，現在までに知られている折り目写像の問題の進捗を簡単にまとめたものである．

注 1.1. 本講究録は紙数の制限があるため，詳しい証明や議論などは省略せざるをえない．そのため議論の合間に，適宜演習を配置したので，それらを解きながら読み進んでいただけたら理解の助けになるかもしれない．楽しんでいただけたら幸いである．

2. 写像のリフト問題

本節では，後述する secondary obstruction の議論の理解を助けるために，少々回り道であるが障害理論に関わる写像のリフト問題の典型例を『(古典的) 微分位相幾何学』の問題を中心として論じることにする．実は，ここで論ずる典型例が折り目写像の存在問題を攻略するための雛形となっていることが後節の議論でわかるであろう．以下，多様体や写像は特に断らない限りすべて C^∞ 級カテゴリーで考えているものとする．

[1)]Golubitsky-Guillemin は [17, Chapter III.§4] の中で折り目写像のことを **submersion with folds** と呼んでいる．それ以前に，E. Calabi [8] は，やはりモース理論の一般化という観点から **quasi-surjective mapping** と呼んで研究し，ある断面曲率をもつ単連結完備リーマン多様体の研究へ応用した．

多様体 M の上で展開される幾何学的構造を問題とするとき，その構造の **"存在問題"** と **"分類問題"** を調べる方法論の一つが写像のリフト問題である．$f: M \to B$ を M 上の構造を調べるために，本質的な情報を握る写像とする．その意味で，B はしばしば分類空間とよばれることがある．さらに，ファイバー束 $\pi: E \to B$ に対して，写像 $h: M \to E$ があって $\pi \circ h = f$ を満たすとき，h のことを f の**リフト** (lift) という．

簡単かつ典型的な例として，M の上の**零点をもたないベクトル場の存在問題**を考えてみよう．よく知られているように，M を n 次元の閉多様体とするとき，M 上の n 次元ベクトル束の同型類全体の集合は，連続写像のホモトピー類集合 $[M, BO(n)]$ と一対一に対応する．ここで，$BO(n)$ は分類空間である．したがって，M 上の接束 TM をあたえる写像 $\tau \in [M, BO(n)]$ (のホモトピー類) を選ぶことにする．そこで，次の写像のリフト問題を考える：

$$\begin{tikzcd} & BO(n-1) \arrow[d, "\pi"] \\ M \arrow[ur, "h"] \arrow[r, "\tau"] & BO(n) \end{tikzcd}$$

ここで，ファイバー束 $\pi: BO(n-1) \to BO(n)$ は包含写像 $O(n-1) \hookrightarrow O(n)$ から誘導され，そのファイバーは $O(n)/O(n-1) \cong S^{n-1}$ である（詳しくは，[56] 参照）．リフト h はいつでも存在するわけではなくて，M の位相構造に依存する．また，リフトが存在することと，M 上のある $(n-1)$ 次元ベクトル束 ξ と自明束 ε^1 で

$$TM \cong \xi \oplus \varepsilon^1$$

を満たすようなものの存在は同値である．したがって，これは零点をもたないベクトル場の存在問題と同値である．

さて，障害理論からリフトの存在のための障害類は

$$\chi_\tau \in H^n(M; \pi_{n-1}(S^{n-1})) \cong H^n(M; \mathcal{Z}) \cong \mathcal{Z}$$

であり，これは接束 TM のオイラー類である．ホモトピー群は $\pi_{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$ だが，$\mathcal{Z}$ は M が向き付け可能ならば $\mathbb{Z}$ であり，M が向き付け不可能な場合は局所系をあらわす．よって，リフトが存在するための必要十分条件は TM のオイラー類が消えること，すなわちオイラー標数が

$$\chi(M) = \langle \chi_\tau, [M] \rangle = 0$$

となることである．ここで，最初の等号は Poincaré-Hopf の定理（[50]）であり，$[M]$ は M の基本ホモロジー類，$\langle \ , \ \rangle$ はクロネッカー積を表す．

零点を持たないベクトル場の存在問題の拡張として，k 個の一次独立なベクトル場（これを M 上の**接 k 枠場**という）の存在問題も考えられる．この場合も写像のリフト問題

$$\begin{tikzcd} & BO(n-k) \arrow[d, "\pi"] \\ M \arrow[ur, "h"] \arrow[r, "\tau"] & BO(n) \end{tikzcd}$$

と捉えることができる．ただし，この場合ファイバー束 $\pi: BO(n-k) \to BO(n)$ のファイバーは $\mathbb{R}^n$ における正規直交 k 枠全体からなる Stiefel 多様体 $V_k(\mathbb{R}^n) \cong O(n)/O(n-k)$ である．ホモトピー群 $\pi_i(V_k(\mathbb{R}^n))$ の構造に依存して，オイラー類以外の高次の障害類が一般に現

れる．Stiefel 多様体のホモトピー群はかなりよく計算されているので高次の障害類を決定できる場合は多くある．

一つだけ例を述べると，Dold-Whitney によって，向き付け可能な 4 次元閉多様体 M に対して，M 上に接 3 枠場が存在するための必要十分条件はつぎの三つの障害類が消えることであることが示された：

$$w_2 \in H^2(M;\mathbb{Z}_2),\quad p_1 \in H^4(M;\mathbb{Z}),\quad \chi \in H^4(M;\mathbb{Z}).$$

ここで，χ は再びオイラー類，w_2 は第二 Stiefel-Whitney 類，p_1 は第一 Pontrjagin 類を表す（特性類については [30, 50] を参照）．M が向き付け不可能な 4 次元多様体の場合は p_1 は本質的障害ではなくなる（整係数では定義されない，あるいは χ に含まれると言うべきか？）ので，w_2 とオイラー標数 $\chi(M)$ のみが障害となる．

続いて多様体の **"はめ込み問題"** について触れよう．n 次元閉多様体 M から $\mathbb{R}^{n+k}$ へのはめ込み写像が存在するための必要十分条件は，Smale-Hirsch 理論（[1]）により

$$TM \oplus \nu \cong \varepsilon^{n+k} \tag{2.1}$$

を満たす k 次元ベクトル束 ν が存在すること，が知られている．

一方，古典的に "任意の n 次元多様体 M は $\mathbb{R}^{2n}$ にはめ込み可能" であることが Whitney により証明された（[1, 50]）．すなわち，$k = n$ ならば無条件で (2.1) を満たす M 上のベクトル束 ν が存在する．

> **"多様体 M が与えられたとき（あるいは M に関わらず），このはめ込み先の次元をさらにどこまで下げることが可能か？"**

というのがいわゆる「はめ込み問題」である．$k < n$ のとき，はめ込み写像 $f : M \to \mathbb{R}^{n+k}$ の存在問題は

$$\begin{tikzcd} & BO(k) \arrow[d, "\pi"] \\ M \arrow[ur, "h"] \arrow[r, "\nu"'] & BO(n) \end{tikzcd}$$

を満たすリフト h の存在問題と同値である．ここで，$\nu : M \to BO(n)$ は法束の分類写像であり，ファイバー束 $\pi : BO(k) \to BO(n)$ のファイバーは Stiefel 多様体 $V_{n-k}(\mathbb{R}^n)$ である．

さて，多様体論において特性類が本質的役割を果たすのは 4 次元以上の多様体に対してであるといってよい．そこで，その一番低い 4 次元で「はめ込み問題」を考察することにしよう．やはり，Whitney により（[1, 50] 参照）任意の 4 次元閉多様体 M^4 に対して，はめ込み写像 $f : M^4 \to \mathbb{R}^7$ が存在することが知られている．したがって，ここではもう 1 次元下げて，はめ込み写像 $f : M^4 \to \mathbb{R}^6$ の存在問題を考察しよう．M^4 が向き付け不可能なときは，はめ込みの存在はつぎの条件を満たすコホモロジー類 $v \in H^2(M^4;\mathbb{Z}_2)$ が存在することと同値である：

(i) $w_2 = w_1^2 + v \in H^2(M^4;\mathbb{Z}_2)$
(ii) $w_1^2 \smile v = 0 \in H^4(M^4;\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$.

ここで，$w_1^2 = w_1 \smile w_1$ であり，$\smile$ はカップ積を表す．

◇**演習 1.** 上の条件を利用して，$\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2$ 上には $\mathbb{R}^6$ へのはめ込み写像が存在するが，$\mathbb{R}P^4$ 上には存在しないことを示せ．また，$\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2$ から $\mathbb{R}^6$ へのはめ込み写像を具体的に構成せよ（ヒント：ボーイ曲面を用いるとよい．）．

一方，M^4 が向き付け可能なときは，はめ込みの存在はつぎの条件を満たす整係数コホモロジー類 $v \in H^2(M^4;\mathbb{Z})$ が存在することと同値である：

(i) $w_2 \equiv v \pmod 2$

(ii) $p_1 = -v \smile v \in H^4(M^4;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$

◇**演習 2.** 上の条件を利用して，$\mathbb{C}P^2 \sharp \overline{\mathbb{C}P^2}$ 上には $\mathbb{R}^6$ へのはめ込み写像が存在するが，$\mathbb{C}P^2 \sharp \mathbb{C}P^2$ 上には存在しない[2)]ことを示せ．また，$\mathbb{C}P^2$ から $\mathbb{R}^6$ へのはめ込み写像も存在しないことを示せ．さらに，$\mathbb{C}P^2 \sharp \overline{\mathbb{C}P^2}$ から $\mathbb{R}^6$ へのはめ込み写像を具体的に構成せよ．

向き付け可能な場合は，さらに面白い結果を導出できる．そのために，対称双一次形式の理論を借用する．上の条件 (i) を満たすようなコホモロジー類 v は特性的であると言われる．するとよく知られた Van der Blij の定理（[29]）を適用して

$$\sigma(M^4) \equiv v \smile v \pmod 8 \tag{2.2}$$

が得られる．ここで，$\sigma(M^4)$ は M^4 の符号数である．Hirzebruch の符号数定理から $3\sigma(M^4) = \langle p_1, [M^4] \rangle$ だから，条件 (ii) と (2.2) を合わせて

$$3\sigma(M^4) \equiv -\sigma(M^4) \pmod 8$$

より，$\sigma(M^4) \in 2\mathbb{Z}$ を得る．ポアンカレ双対性から，$\chi(M^4) \equiv \sigma(M^4) \pmod 2$ を得るので，結局つぎが示せた．

■**定理 2.1.** 向き付け可能な 4 次元閉多様体 M^4 から $\mathbb{R}^6$ へのはめ込み写像が存在するならば，最高次 Stiefel-Whitney 類 $w_4 \in H^4(M^4;\mathbb{Z}_2)$ は消えなければならない．

注 2.2. この結果は，Atiyah-Singer 指数定理を用いても証明される．Lawson-Michelsohn [23, Theorem 3.1] を参照せよ．[23] では，多様体のはめ込み問題と k 個の一次独立なベクトル場の存在問題が Atiyah-Singer 指数定理を通して，同じ観点から議論されている．

演習 2 にもあるように，定理 2.1 で逆の主張は一般には成り立たない．これに関わる背景を含めて，定理 2.1 を『**大域的特異点論**』の観点から解釈し直そう．$S^\infty(M^4, \mathbb{R}^6)$ を C^∞ 級安定写像 (stable map) 全体の集合とする．Thom により，$S^\infty(M^4, \mathbb{R}^6)$ は写像空間 $C^\infty(M^4, \mathbb{R}^6)$ の中で開かつ稠密であることが知られている（[17, 20]）．そこで，$f: M^4 \to \mathbb{R}^6$ を任意の安定写像とする．$S(f) = \{x \in M^4; \operatorname{rank} df_x < 4\}$ を写像 f の特異点集合とする．このとき，$\Sigma^i(f) = \{x \in S(f); \operatorname{rank} df_x = i\}$ の M^4 における余次元は $(4-i)(6-i)$ であることが知られている．したがって，$\operatorname{codim} \Sigma^3(f) = 3$, $\operatorname{codim} \Sigma^2(f) = 8 > 4$ なので，Thom のジェット横断性定理から $\Sigma^2(f) = \emptyset$ としてよい（詳しくは [16, 20] 参照）．よって，$S(f) = \Sigma^3(f)$ は M^4 の 1 次元部分多様体であることが直ちに分かる．また，特異点集合の Thom 多項式は

$$[S(f)]_2^* = \bar{w}_3 = w_1^3 + w_3 = w_1^3 \in H^3(M^4;\mathbb{Z}_2)$$

である（$[S(f)]_2 \in H_1(M^4;\mathbb{Z}_2)$ であり，上付きの $*$ はその Poincaré 双対を取ることを表す．また最初の等号は Thom により，最後の等号は Whitney による）．この特異点は Whitney の傘と呼ばれる特異点であることに注意する．このことから，例えば $\mathbb{R}P^4$ から $\mathbb{R}^6$ へのはめ込みは存在しないことがただちにしたがう．$w_1^3(\mathbb{R}P^4) \neq 0$ だからである．

一方，M^4 が向き付け可能ならば特異点集合の Thom 多項式は消えている．だが，定理 2.1 より M^4 のオイラー標数が奇数ならば（例えば，$\mathbb{C}P^2$ の奇数個の連結和を M^4 とせよ），この特異点は消去不可能であることがしたがう．よって，$w_4 \in H^4(M^4;\mathbb{Z}_2)$ は安定写像 $f: M^4 \to \mathbb{R}^6$ の特異点を消去するための secondary obstruction といえる．

この例は次元を一般化して考察することが可能である．M^n を n 次元閉多様体とし，安定写像 $f: M^n \to \mathbb{R}^{2n-2}$ を考える．安定写像全体の集合 $S^\infty(M^n, \mathbb{R}^{2n-2})$ は写像空間 $C^\infty(M^n, \mathbb{R}^{2n-2})$

[2)] したがって，この「**はめ込み問題**」において 4 次元多様体の向き付けは本質的である．

の中で開かつ稠密である（[17] 参照）．$S(f)=\{x\in M^4; \operatorname{rank} df_x<n\}$ を写像 f の特異点集合とするとき，$\Sigma^i(f)=\{x\in S(f); \operatorname{rank} df_x=i\}$ の M^n における余次元は $(n-i)(2n-2-i)$ であるから，

$$\operatorname{codim}\Sigma^{n-1}(f)=n-1,\quad \operatorname{codim}\Sigma^{n-2}(f)=2n>n$$

なので，$\Sigma^{n-2}(f)=\emptyset$ と仮定してよい．さらに，特異点集合の Thom 多項式は

$$[S(f)]_2^*=\bar{w}_{n-1}\in H^{n-1}(M^n;\mathbb{Z}_2)$$

であることが知られている（[52]）．このとき，n が偶数で，かつ M^n が向き付け可能ならば，$\bar{w}_{n-1}=0$ であることがつぎのように証明できる．まず，M^n が向き付け可能であることと，平方作用素 $Sq^1: H^{n-1}(M^n;\mathbb{Z}_2)\to H^n(M^n;\mathbb{Z}_2)$ が自明であることは同値であることに注意する．これは Sq^1 が Bockstein 準同型と mod 2 簡約との合成であることからしたがう（[47] 参照）．すると，i が奇数のとき $Sq^i=Sq^1Sq^{i-1}$ が成り立つから，M^n が向き付け可能ならば，$Sq^i: H^{n-i}(M^n;\mathbb{Z}_2)\to H^n(M^n;\mathbb{Z}_2)$ は i が奇数のとき自明である．このとき，奇数次双対 Wu 類（[30] 参照）$\bar{v}_{2k-1}\in H^{2k-1}(M^n;\mathbb{Z}_2)$ は消える．よって，双対 Wu 類の定義から n が偶数なので $\bar{w}_{n-1}=0$ を得る．こうして，$S(f)$ の Thom 多項式は消えることがわかった．

一方，Mahowald [26] によって，$n>4$ のときはめ込み写像 $f: M^n\to\mathbb{R}^{2n-2}$ が存在するための必要十分条件は $\bar{w}_2\smile\bar{w}_{n-2}=0$ であることが示されている．(これは secondary obstruction の計算結果として従うことである.）したがって，向き付け可能な 4 次元閉多様体に対して，$\bar{w}_2\smile\bar{w}_2=w_2\smile w_2=w_4$ が成り立つので定理 2.1 と合わせて，つぎのことが分かった[3)]：

■**定理 2.3.** M^n を偶数次元の向き付け可能な n 次元閉多様体とする．ただし，$n\geq 4$ とする．もし，$\bar{w}_2\smile\bar{w}_{n-2}\neq 0$ な多様体を選ぶと任意の安定写像 $f: M^n\to\mathbb{R}^{2n-2}$ の特異点集合の Thom 多項式は消えるが，特異点を消去することはできない．

◇**演習 3.** 向き付け可能な 6 次元閉多様体に対しては，つねに $\bar{w}_2\smile\bar{w}_4=0$ が成り立つことを示せ．向き付け可能な 8 次元閉多様体 M^8 で，$\bar{w}_2\smile\bar{w}_6\neq 0$ となるようなものの例を示せ．

3. $n=p$ の場合の折り目写像の存在問題

M^n を安定平行化可能な n 次元閉多様体とする．例えば，Lie 群や Stiefel 多様体あるいはこれらによる直積などがそうである．定義から，$TM^n\oplus\varepsilon^1\cong\varepsilon^{n+1}$ である．すると，再び Smale-Hirsch 理論により，はめ込み写像 $f: M^n\to\mathbb{R}^{n+1}$ が存在することがしたがう．そこで，今度はリフト問題の逆を考えてみよう．

> “適当な線形射影 $\pi:\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}^n$ との合成写像 $g=\pi\circ f: M^n\to\mathbb{R}^n$ を考える．写像 g としてどの程度‘はめ込みに近い’写像が取れるだろうか？”

任意の閉多様体 M^n に対して，C^∞ 級写像 $g: M^n\to\mathbb{R}^n$ を考えると g には必ず特異点が現れる．なぜなら，g をはめ込みと仮定すると，その像 $g(M^n)$ は M^n が閉集合だから閉集合となる．さらに，(逆関数定理を用いて）$g(M^n)$ は開集合であることもわかる．すると $g(M^n)$ が開かつ閉なので g は全射になるが，これは $\mathbb{R}^n$ がコンパクト集合ではないので矛盾が生じるからである．

ところで，はめ込みに近いという表現は曖昧な言い方であるが，正確には我々は「折り目写像」を考察の対象とする．(後の便宜のため一般的な設定で）定義を与えよう．

---

3)筆者の知る限り，secondary obstruction の本質的な例として知られていたものは，つい最近までは定義域多様体の次元が 4 次元に限られていたが，この定理は一般次元で存在し得ることを示す‘発掘例’である．

■**定義 3.1.** M^n を n 次元多様体，N^p を p 次元多様体とし，$f: M^n \to N^p$ をそれらの多様体の間の C^∞ 級写像とする．ただし，$n \geq p$ と仮定する．特異点集合 $S(f) = \{x \in M^n; \operatorname{rank} df_x < p\}$ の点を中心とする局所的対応が

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_{p-1}, \pm x_p^2 \pm \cdots \pm x_n^2)$$

で与えられる点を写像 f の**折り目特異点** (fold singularity) という．任意の点 $p \in S(f)$ が折り目特異点となるような写像 f を**折り目写像** (fold map) という．

注 3.2. 定義 3.1 にあるように，折り目写像の定義は値域を一般の多様体にして構わない．しかし，本稿では簡単のためと，モース理論の一般化という視点を明確にするために値域をユークリッド空間に限定して論ずることにする．

◇**演習 4.** M^n を n 次元閉多様体とする．$n \geq p$ のとき，任意の C^∞ 級安定写像 $f: M^n \to \mathbb{R}^p$ は標準型が

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_{p-1}, x_p^2 + \cdots + x_n^2)$$

となる折り目特異点（これを**定値折り目特異点** (definite fold singularity) という）を必ずもつことを示せ（[20] 参照）．

$n = p$ のとき，任意の折り目特異点は定値折り目である．そこで上で述べた問題は次のようになる：

“適当な線形射影 $\pi: \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ をうまく選んで，合成写像 $g = \pi \circ f: M^n \to \mathbb{R}^n$ が折り目写像にできるか？”

ところで，$f: M^n \to \mathbb{R}^n$ を折り目写像とするとき，特異点集合 $S(f)$ は M^n の余次元 1 の部分多様体であることが容易にわかる．さらに，制限写像 $f|_{S(f)}: S(f) \to \mathbb{R}^n$ は余次元 1 のはめ込み写像であることもわかる．M^n が向き付け可能であるとき，次の二つの集合

$$M_+ = \{x \in M^n; |J_f(x)| \geq 0\}, \quad M_- = \{x \in M^n; |J_f(x)| \leq 0\}$$

は well-defined であり，$S(f) = \partial M_+ = \partial M_-$，$M^n = M_+ \cup_{S(f)} M_-$ である．この分解から，M^n は安定平行化可能であることがわかる．整理すると

■**命題 3.3.** M^n を向き付け可能な n 次元閉多様体とするとき，折り目写像 $f: M^n \to \mathbb{R}^n$ が存在するならば，M^n は安定平行化可能である．

◇**演習 5.** M^n を向き付け可能な n 次元閉多様体とするとき，折り目写像 $g: M^n \to \mathbb{R}^n$ が存在するならば，はめ込み $f: M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ のリフトが存在することを示せ[4]．

さて，命題 3.3 の逆の主張は成り立つだろうか？　すなわち，“M^n を安定平行化可能な n 次元閉多様体とするとき，折り目写像 $f: M^n \to \mathbb{R}^n$ は存在するだろうか？” この問いは次元の関係で特異点が必ず現れることから，はめ込み問題と比べて格段に難しいが 1971 年 Y. Eliashberg によって肯定的に解決された．つまり，次の定理となる：

■**定理 3.4** ([10])**.** M^n を向き付け可能な n 次元閉多様体とするとき，折り目写像 $f: M^n \to \mathbb{R}^n$ が存在するための必要十分条件は，M^n が安定平行化可能となることである．

そこで，当然起こる問題として次が考えられる：“M^n が**向き付け不可能**なときはどうなるだろうか？” $n = 2$ の場合は，Eliashberg が解決済みで

■**定理 3.5** ([10])**.** 折り目写像 $f: M^2 \to \mathbb{R}^2$ が存在するための必要十分条件は，$w_2 = 0$ すなわち $\chi(M^n) \equiv 0 \pmod 2$ が成り立つことである．

---

[4] この問題は少し難しいので，例えば [45, 7] を参照．

ここで，w_2 はカスプ（局所的な対応が $(x,y)\mapsto(x,y^3+xy)$ となる）特異点の Thom 多項式であることに注意する．

$n=3$ の場合については，論文 [10] の中では向き付け不可能な場合について何も触れられていない．そこで答えを述べる前に，安定写像 $f:M^3\to\mathbb{R}^3$ に関わる基礎事項について復習しておこう．安定写像 $f:M^3\to\mathbb{R}^3$ には次の三つの型の特異点が一般に現れる：

(i) $(x_1,x_2,x_3)\mapsto(x_1,x_2,x_3^2)$　（折り目）
(ii) $(x_1,x_2,x_3)\mapsto(x_1,x_2,x_3^3+x_1x_3)$　（カスプ）
(iii) $(x_1,x_2,x_3)\mapsto(x_1,x_2,x_3^4+x_1x_3^2+x_2x_3)$　（燕の尾）

折り目は A_1 型，カスプは A_2 型，燕の尾は A_3 型特異点と呼ばれることもある．折り目集合を $A_1(f)$，カスプ集合を $A_2(f)$，燕の尾集合を $A_3(f)$ と表すことにすると

$$S(f)=\overline{A_1(f)}=A_1(f)\cup A_2(f)\cup A_3(f),\quad \overline{A_2(f)}=A_2(f)\cup A_3(f)$$

が成り立ち，$A_3(f)$ は（偶数個の）離散点集合である．このとき，それぞれの Thom 多項式は

$$[S(f)]_2^*=w_1,\quad [\overline{A_2(f)}]_2^*=w_2,\quad [A_3(f)]_2^*=0$$

であることが知られている（[51]）．したがって，折り目写像が存在するための必要条件として $w_2=0$ が得られる．(M^3 が向き付け可能な場合はこの必要条件は自動的に満たされるわけである.）実際，$w_2=0$ が十分条件であることが [46] で示された．よって，次の結果を得る：

■定理 3.6. 折り目写像 $f:M^3\to\mathbb{R}^3$ が存在するための必要十分条件は，$w_2=0$ が成り立つことである．

証明については，§5で触れる．実際，$w_2\neq 0$ となる3次元閉多様体の例は $S^1\times(\sharp^{2k+1}\mathbb{R}P^2)$ などがある．具体的に写像を構成するのも容易である．一つだけ例を与えよう．まず，$g:\mathbb{R}P^2\to\mathbb{R}^3$ を Boy 曲面（三重点を唯一つもつ自己横断的なはめ込み）とする．適当な直交射影 $\pi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ をとって，合成すると外側に折り目からなる円周があり，内側にカスプが3個現れる安定写像 $h:=\pi\circ g:\mathbb{R}P^2\to\mathbb{R}^2$ が得られる．ただし，このカスプは奇数個なので消去不可能であることに注意する．そこで，次の合成写像 f を考える：

$$f:\mathbb{R}P^2\times S^1\xrightarrow{h\times\mathrm{id}}\mathbb{R}^2\times S^1\xrightarrow{\mathrm{emb}}\mathbb{R}^3$$

ここで，2番目の写像 emb は標準的な埋め込みを表す．特異点集合 $S(f)$ は2個のトーラス T^2 からなり，内側のトーラス上にカスプ曲線が3本存在し，それらが非自明な元 $w_2\in H^2(\mathbb{R}P^2\times S^1;\mathbb{Z}_2)$ に対応していることがわかる．したがって，写像 f のカスプは消去することができない．

$n=2,3$ の場合に関して，折り目写像の存在問題を考える限り，カスプの Thom 多項式が唯一の障害類であることが分かった．

さて，$n=2,3$ の場合が解決したので次に問題となるのが $n=4$ の場合である．この場合は，$n=2,3$ の場合に比べて考察がもう一段難しくなる．実は Thom 多項式以外の secondary obstruction が現れるのである．これについては§6で論じることにする．尚，$n\geq 5$ についての問題は筆者の知る限り未解決であると思われる．(しかし，本稿を書きながら計算していたら，$n=5,6$ の場合は概ね解決したが，$n\geq 7$ では相当難しい.)

4. $n>p$ の場合の折り目写像の存在問題

本節では，折り目写像の存在問題を一般次元対 (n,p) で論じる．$n>p$ の場合の問題は，$n=p$ の場合に比べてさらに難しくなる．ただし，$p=1$ の場合は自明に解決している[5)]．

5) $p=1$ の場合，折り目写像はモース関数に他ならないからである．

Eliashberg は論文 [10] の中で，$n=p$ の場合の折り目写像の存在問題を概ね解決した後，1 年足らずで一般次元対 (n,p) の場合に折り目写像の存在のための十分条件を決定することに成功した（[12]–[14] も参照）．

■定理 4.1 (Eliashberg [10, 11]). $n \geq p$ のとき，M^n が n 次元安定平行化可能な閉多様体ならば，折り目写像 $f: M^n \to \mathbb{R}^p$ がいつでも存在する．

しかしながら，安定平行性は必要条件ではない．

◇演習 6. 折り目写像 $f: \mathbb{C}P^2 \sharp \overline{\mathbb{C}P^2} \to \mathbb{R}^3$ を構成せよ．さらに，$w_2(\mathbb{C}P^2 \sharp \overline{\mathbb{C}P^2}) \neq 0$，すなわち $\mathbb{C}P^2 \sharp \overline{\mathbb{C}P^2}$ は安定平行化可能ではない，ことを示せ．

折り目写像が存在するための必要十分条件を求めることは p の次元に上がるにつれて難しくなる．しかし，$p=2$ の場合は最終的に Eliashberg の仕事により 1971 年に決着がついた．次の結果は，Thom-Levine-Eliashberg の定理と呼ばれる：

■定理 4.2 ([51, 25, 10]). 折り目写像 $f: M^n \to \mathbb{R}^2$ が存在するための必要十分条件は，$\chi(M^n) \equiv 0 \pmod 2$ が成り立つことである．すなわち，カスプの Thom 多項式が唯一の障害類である．

この結果は次節で議論する内容の中でも再証明される．$p=3$ の場合はさらに興味深い．特に，n の次元が最も低い場合（$n=4$ のとき）が面白く，$n \geq 5$ では遭遇しない例外的な事情に出くわせる．

さて，向き付け可能な 4 次元多様体から $\mathbb{R}^3$ への折り目写像の存在のための必要十分条件が，最近佐伯修と Sadykov によって独立に与えられた：

■定理 4.3 (Saeki [40], Sadykov [35]). M^4 を向き付け可能な 4 次元閉多様体とする．折り目写像 $f: M^4 \to \mathbb{R}^3$ が存在するための必要十分条件は，あるコホモロジー類 $v \in H^2(M^4;\mathbb{Z})$ が存在して $v \smile v - p_1 = 0 \in H^4(M^4;\mathbb{Z})$ が成り立つことである．さらに，後者の条件は I_{M^4} を M^4 上の交叉形式とするとき，次が成り立つことと同値である：

$$I_{M^4} \not\cong \pm(1) \quad \text{または} \quad \pm\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}.$$

この定理から容易に次が得られる．

■系 4.4. M^4 を任意の向き付け可能な 4 次元閉多様体とするとき，折り目写像 $f: M^4 \sharp S^2 \times S^2 \to \mathbb{R}^3$ はいつでも存在する．

注 4.5. (i) 定理 4.3 から，任意の C^∞ 級写像 $f: \mathbb{C}P^2 \sharp \mathbb{C}P^2 \to \mathbb{R}^3$ は必ず折り目以外の特異点をもつことがしたがう．一方，演習 6 より $\mathbb{C}P^2 \sharp \overline{\mathbb{C}P^2}$ 上には $\mathbb{R}^3$ への折り目写像が存在する．したがって，折り目写像の存在問題は向き付け可能な 4 次元多様体に対しては，向きの入れ方が本質的であることを示している．

(ii) 任意の安定写像 $f: M^4 \to \mathbb{R}^3$ の安定特異点は，折り目，カスプ，燕の尾の三つの型であり，それらの Thom 多項式はそれぞれ w_2, 0, $\bar{w}_1^4 + \bar{w}_1\bar{w}_3$ であることが知られている．特に，M^4 が向き付け可能ならば折り目以外の Thom 多項式は消えていて，安藤の定理（[2]）から燕の尾はいつでも消せることがしたがう．一方，定理 4.3 は交叉形式が $\pm(1)$, $\pm\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ の 4 次元多様体に対しては，カスプが消去できないことを主張する．これは，Thom 多項式以外の障害が存在することを意味する．

(iii) M^4 が向き付け不可能な 4 次元閉多様体の場合の定理 4.3 のような特徴付けは与えられていない．部分的解答について，§ 6 で論ずる．

続いて，$n \geq 5$, $p = 3$ のときの解に移ろう．Sadykov は，Chess 予想 [9]（多様体が向き付け可能であるとき，$n - p$ が奇数の場合の Morin 写像の A_4 型特異点はいつでも消去可能であろうという予想）の解決（[34]）での手法を拡張して，次の結果を最近得ている：

■**定理 4.6** (Sadykov [36]). M^{2n} を向き付け可能な $2n$ 次元閉多様体とするとき，$n \geq 4$ ならば折り目写像 $f : M^{2n} \to \mathbb{R}^3$ がいつでも存在する．

向き付け不可能な場合にも拡張できるかどうかは今のところ未解決である．ただし，Sadykov の定理でカバーされていない 6 次元の場合は，部分的解答として筆者によって次が得られている：

■**命題 4.7** ([46]). M^6 をオイラー標数が偶数の 6 次元閉多様体とする．もし，M^6 が向き付け可能ならば，つねに折り目写像 $f : M^6 \to \mathbb{R}^3$ が存在する．M^6 が向き付け不可能な場合は，$W_5(M^6) = 0$ ならば，折り目写像 $f : M^6 \to \mathbb{R}^3$ が存在する．

注 4.8. オイラー標数が奇数の場合は未解決である．例えば，$M^6 = \mathbb{R}P^6$, $\mathbb{R}P^4 \times \mathbb{R}P^2$, $\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2$ などの場合に，折り目写像 $f : M^6 \to \mathbb{R}^3$ が存在するか否かも未解決と思われる．おそらく，安定写像 $f : M^6 \to \mathbb{R}^3$ の燕の尾特異点の Thom 多項式すら未だ決定されていないだろう．しかし，佐伯 [38] による $\mathbb{R}P^2$ 上の $\mathbb{R}P^2$ 束の全空間 M^4 から $\mathbb{R}^3$ への折り目写像の構成（演習 9 参照）を真似て，$\mathbb{R}P^4$ 上の $\mathbb{R}P^2$ 束の全空間 M^6 から $\mathbb{R}^3$ への折り目写像が作れる．このとき，$\chi(M^6) = 1$ なので，'オイラー標数が偶数である' ことは必要条件ではない．オイラー標数が奇数だと特異点集合 $S(f)$ に必ず向きづけ不可能な閉曲面が現れ，$S(f)$ への制限写像（はめ込み）の法束が自明ではなくなることに注意．尚，[46] では上の命題 4.7 における条件 $W_5(M^6) = 0$ の部分を $w_4(M^6) = 0$ と誤って記述してしまっている（佐伯氏のご指摘）．

実は，折り目写像の存在問題を考える場合，$n - p$ が奇数であるか偶数であるかによって，微妙に問題の難しさが異なる．次節でその理由が明らかになるが，$n - p$ が奇数の場合の方がより難しい．一方，定義域多様体が奇数次元の場合（$n - p$ が偶数の場合），筆者は（向き付け可能性の仮定無しに）次の結果を得た：

■**定理 4.9** ([46]). M^{2n+1} を $2n+1$ 次元閉多様体とするとき，折り目写像 $f : M^{2n+1} \to \mathbb{R}^3$ が存在するための必要十分条件は，$w_{2n} = 0$ が成り立つことである．

ここで，$w_{2n} \in H^{2n}(M^{2n+1}; \mathbb{Z}_2)$ はカスプの Thom 多項式である．また，定理の $n = 1$ の場合が定理 3.6 である．証明は，次節で論じる安藤のホモトピー原理に基づいている．ただし，n が奇数の場合，M^{2n+1} が向き付け可能ならばつねに $w_{2n} = 0$ が満たされることが簡単な計算からわかるので，無条件に折り目写像が存在することがしたがう．一方，値域多様体の次元が $p \geq 4$ の場合には，Eliashberg の定理以外の際立った結果はおそらくほとんど得られていないと思われる．

5. 安藤のホモトピー原理

Smale-Hirsch のはめ込み理論，Eliashberg の折り目写像の存在理論などは 1-jet（定義域多様体と値域多様体の接束の間の準同型束）に対するホモトピー原理（詳しくは [1], [18], [15] 等を参照）に基づく．一方，安藤良文は [4] において，折り目写像の存在定理を 2-jet 束におけるホモトピー原理に精密化することに成功し，次の重要な定理を得た：

■**定理 5.1** (Ando [4]). $n \geq p \geq 2$ のとき，fiberwise epimorphism $TM^n \oplus \varepsilon^1 \to \varepsilon^p$ が存在するならば，折り目写像 $f : M^n \to \mathbb{R}^p$ が存在する．特に，$n - p$ が偶数ならば逆も成り立つ．

折り目写像の存在がある束写像の存在に置き換えられたことになる．前節の後半で述べたように，$n - p$ が奇数か偶数かにある束写像の存在が折り目写像の存在のための必要十分条

件になるか十分条件にとどまるかが分かれ，その違いに問題の考察の難易度が依拠している．この違いについて少し補足をしておこう．折り目写像 $f: M^n \to \mathbb{R}^p$ が存在すると，その特異点集合は M^n の $p-1$ 次元部分多様体であり，制限写像 $f|_{S(f)}: S(f) \to \mathbb{R}^p$ は余次元 1 のはめ込み写像となることが容易に分かる．実は，安藤による 2-jet レベルのホモトピー原理から，fiberwise epimorphism $TM^n \oplus \varepsilon^1 \to \varepsilon^p$ が存在することと，折り目写像で制限写像 $f|_{S(f)}: S(f) \to \mathbb{R}^p$ のはめ込み写像の法直線束が自明となるようものが存在することが同値であることがしたがうのである．ただし，$n-p$ が偶数の場合は制限写像のはめ込みの法直線束はつねに自明であることが分かるが，$n-p$ が奇数の場合は，例えば M^n のオイラー標数が奇数であるとはめ込みの法直線束は非自明となるので，逆の主張が成り立たないという事情がある．

定理 5.1 により，折り目写像の存在問題を考察するに際して，次の定義は我々にとって重要な意味をなす．

■定義 5.2. M^n を n 次元閉多様体とする．

(i) M^n 上の一次独立なベクトル場の最大個数を M^n の**スパン** (span) といい，$\mathrm{span}(M^n)$ であらわす．

(ii) ベクトル束 $TM^n \oplus \varepsilon^1$ の一次独立な切断の最大個数から 1 引いた数を M^n の**安定スパン** (stable span) といい，$\mathrm{span}^0(M^n)$ であらわす．

Poincaré-Hopf の定理（[50, 8 章]）より，$\mathrm{span}(M^n) \geq 1 \iff \chi(M^n) = 0$ が成り立つ．また，$\mathrm{span}^0(M^n) \geq 1 \iff \chi(M^n) \equiv 0 \pmod 2$ が容易にわかる．J. F. Adams の定理から，$\mathrm{span}(S^n) = 2^c + 8d - 1$ (ただし,$n+1 = (2a+1)2^{c+4d}$; $c \in \{0, 1, 2, 3\}$) である．また，$\mathrm{span}^0(S^n) = n$ であることは容易にわかる．一般に，$\dim M \geq \mathrm{span}^0(M) \geq \mathrm{span}(M)$ である．

ここで定理 4.2 の証明を与えておこう：安定写像 $f: M^n \to \mathbb{R}^2$ の特異点集合は，S^1 の非交和なのでその制限写像（はめ込み）の法束は自動的に自明になるので，折り目写像 $f: M^n \to \mathbb{R}^2$ が存在するための必要十分条件は，$\mathrm{span}^0(M^n) \geq 1$ である．これは上で述べたように（多様体 M^n の向き付けとは無関係に）$\chi(M^n) \in 2\mathbb{Z}$ と同値である．

◇演習 7. (i) $\mathrm{span}(\mathbb{R}P^n) = \mathrm{span}(S^n)$ が成り立つことを示せ．

(ii) $\mathrm{span}^0(\mathbb{R}P^n) = \mathrm{span}(\mathbb{R}P^n)$ が成り立つことを示せ．

(iii) $\mathrm{span}^0(S^1 \times \mathbb{R}P^2)$ を求めよ．また，その結果と定理 3.6 との関連を考察せよ．

安定スパンの定義から，fiberwise epimorphism $TM^n \oplus \varepsilon^1 \to \varepsilon^p$ が存在することと，$\mathrm{span}^0(M^n) \geq p-1$ が成り立つことは同値である．したがって，定理 5.1 から次が得られる（[40] 参照）：

■系 5.3. $\mathrm{span}^0(M^n) \geq p-1$ ならば，折り目写像 $f: M^n \to \mathbb{R}^p$ が存在する．さらに，$n-p$ が偶数のとき，折り目写像 $f: M^n \to \mathbb{R}^p$ が存在することと，$\mathrm{span}^0(M^n) \geq p-1$ であることは同値である．

例えば，$\mathrm{span}^0(\mathbb{R}P^{2n}) = 0$ なので，折り目写像 $f: \mathbb{R}P^{2n} \to \mathbb{R}^{2p}$ $(n \geq p \geq 1)$ は存在しないことが直ちにしたがう．多様体の安定スパンを決定する問題は，スパンを決定する問題よりもやや難しい．しかし，$\mathrm{span}^0(M^n) \geq \mathrm{span}(M^n)$ なのでスパンが決定されている多様体のクラスに関して，折り目写像の存在を演繹することは可能である．この種の議論とちょっとしたトリックを用いて，定理 4.7 や定理 4.9 は証明される．(安定) スパンに関する詳しい結果については [53]–[55], [22], [33], [21] 等を参照されたい．

ところで，$\mathrm{span}^0(M^n) \geq p-1$ が成り立つための条件は

$$\begin{tikzcd} & BO(n-p+1) \arrow[d, "\pi"] \\ M^n \arrow[ur, "h"] \arrow[r, "\tau"] & BO(n+1) \end{tikzcd}$$

を可換にするリフト h が存在する条件を求めればよい．ただし，τ はベクトル束 $TM^n \oplus \varepsilon^1$ の分類写像であり，ファイバー束 $BO(n-p+1) \to BO(n+1)$ のファイバーは $V_p(\mathbb{R}^{n+1})$ である．ホモトピー群 $\pi_i(V_p(\mathbb{R}^{n+1}))$ はかなりよく計算されているので，その結果に基づいて障害コホモロジー類を求めることができる．折り目写像の存在問題が障害理論に帰着された．

6. 4次元多様体の間の折り目写像

安定写像 $f: M^4 \to \mathbb{R}^4$ には次の五つの型の特異点が一般に現れる：

(i) $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1, x_2, x_3, x_4^2)$　（折り目）
(ii) $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1, x_2, x_3, x_4^3 + x_1x_4)$　（カスプ）
(iii) $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1, x_2, x_3, x_4^4 + x_1x_4^2 + x_2x_4)$　（燕の尾）
(iv) $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1, x_2, x_3, x_4^5 + x_1x_4^3 + x_2x_4^2 + x_3x_4)$　（蝶）
(v) $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1, x_2, x_3^2 + x_1x_4, x_4^2 + x_2x_3)$　（双曲的臍）
$(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1, x_2, x_3^2 - x_4^2 + x_1x_3 + x_2x_4, x_2x_3 + x_3x_4 - x_1x_4)$　（楕円的臍）

蝶特異点（A_4 型）と臍点（D_4 型）はおのおの離散点で現れ，燕の尾特異点（A_3 型）集合は1次元，カスプ特異点（A_2 型）集合は2次元，折り目特異点（A_1 型）集合は3次元の部分多様体であることがわかる．また，安定写像全体の集合 $S^\infty(M^4, \mathbb{R}^4)$ は写像空間の中で開かつ稠密である（[27]）．

Thom, Porteous 等によって Thom 多項式が求められている ([51, 32])：

$$[S(f)]_2^* = w_1,\ [\overline{A_2(f)}]_2^* = w_2,\ [\overline{A_3(f)}]_2^* = w_1w_2,\ [A_4(f)]_2^* = w_1w_3,\ [D_4(f)]_2^* = w_2^2 + w_1w_3$$

さらに，M^4 が向き付け可能ならば臍点の各点に符号が定められ，$[D_4(f)]^* = -p_1$ となる．

ところで，任意の4次元閉多様体に対して，Wu 公式（[30, 11 章]）を用いると

$$w_4 = w_1^4 + w_2^2$$

が成り立つことがわかる．また，M^4 を向き付け可能とするとき，臍点を消すには $p_1 = 0$ でなければならない．すると $p_1 \equiv w_4 \pmod 2$ なので，$p_1 = 0$ となる向き付け可能な4次元閉多様体に対して，任意の安定写像 $f: M^4 \to \mathbb{R}^4$ の Thom 多項式はカスプ以外すべて消えることが直ちにわかる．筆者は，佐伯氏との共同研究で Eliashberg の定理の拡張（Mather の問題の拡張版）として次を得た：

■**定理 6.1** (Saeki-S [42]). M^4 を向き付け可能な4次元閉多様体とする．コホモトピー群 $\pi^4(M^4) \cong \mathbb{Z}$ の任意の元は $p_1(M^4) = 0$ ならば折り目とカスプのみを特異点としてもつ C^∞ 級写像を含む．

したがって，この場合には特異点を消去するための障害は Thom 多項式以外には存在しないことがわかる．では，向き付け不可能な4次元多様体に対しても Thom 多項式以外の障害類は出てこないのだろうか．これに対する解答が最近 Sadykov 氏，佐伯氏との共同研究で得られた：

■定理 6.2 (Sadykov-Saeki-S [37]). M^4 を 4 次元閉多様体とする．折り目写像 $f : M^4 \to \mathbb{R}^4$ が存在するための必要十分条件は，$w_2 = 0$ かつ $p_1 + (\beta w_1)^2 = 0$ が成り立つことである．ここで，β は係数群の短完全系列 $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2 \to 0$ に対応する Bockstein 作用素を表す．

証明は，Postnikov tower の議論を用いて，写像のリフトの障害類を求めることにより得られる．すなわち，$TM^4 \oplus \varepsilon^1$ の分類写像 $\tau : M^4 \to BO(5)$ のリフト $\tilde{\varphi} : M^4 \to BO(1)$ が存在するための障害類を求めればよい．ファイバー束 $\pi : BO(1) \to BO(5)$ のファイバーは $V_4(\mathbb{R}^5)$ だから

$$w_2 \in H^2(M^4; \pi_1(V_4(\mathbb{R}^5))) \cong H^2(M^4; \mathbb{Z}_2)$$

が primary obstruction であり，$\pi_2(V_4(\mathbb{R}^5)) = 0$ なので secondary obstruction は

$$z \in H^4(M^4; \pi_3(V_4(\mathbb{R}^5))) \cong H^4(M^4; \mathbb{Z})$$

に定義される．あとは，スペクトル系列による計算等から障害類が求まる（次の可換図式を参照）．

$$\begin{tikzcd}
V_4(\mathbb{R}^5) \arrow[r] \arrow[d] & BO(1) \arrow[d] & \\
K(\mathbb{Z}_2, 1) \arrow[r] & E \arrow[r] \arrow[d] & K(\mathbb{Z}, 4) \\
M^4 \arrow[r, "\tau"] & BO(5) \arrow[r, "w_2"] & K(\mathbb{Z}_2, 2)
\end{tikzcd}$$

この場合，primary obstruction となる w_2 がカスプの Thom 多項式と一致しているのは偶然ではない．この結果から，特に M が向き付け不可能な場合，カスプを消去するにはトム多項式以外の障害類が存在して，その secondary obstruction が最高次の Stiefel-Whitney 類 $w_4(M) \in H^4(M^4; \mathbb{Z}_2)$ であることがわかる．ただし，M^4 が向きづけ不可能なときは $H^4(M^4; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2$ に注意する．

定理 6.2 は，$\mathrm{span}^0(M^4) \geq 3$ となる必要十分条件を求めたことになる．よって，自明な帰結だが次の重要な結果が得られる：

■定理 6.3 ([37]). 向き付け不可能な 4 次元閉多様体 M^4 が $w_2 = 0$ かつ $w_4 = 0$ を満たすならば，折り目写像 $f : M^4 \to \mathbb{R}^3$ が存在する．

◇演習 8. 向き付け不可能な 4 次元閉多様体 M^4 で，$w_2 = 0$ かつ $w_4 = 0$ を満たすようなものの例を複数列挙せよ．

◇演習 9. オイラー標数が奇数の向き付け不可能な 4 次元閉多様体から $\mathbb{R}^3$ への折り目写像が存在する例[6]を構成せよ（Saeki [38] に $\mathbb{R}P^2$ 上の $\mathbb{R}P^2$ 束の全空間における例があるので参照）．

定義域多様体を高次元にした場合も同様の方法論で折り目写像の必要十分条件が求められた：

■定理 6.4 ([37]).

(i) M^{4n} を向き付け可能な $4n$ 次元閉多様体とする．ただし，$n \geq 2$ とする．このとき，折り目写像 $f : M^{4n} \to \mathbb{R}^4$ が存在するための必要十分条件は，$w_{4n-2} = 0$ かつ $\sigma(M^{4n}) \equiv 0 \pmod 8$ が成り立つことである．

(ii) M^{4n+2} を $(4n+2)$ 次元閉多様体とする．ただし，$n \geq 2$ とする．このとき，折り目写像 $f : M^{4n} \to \mathbb{R}^4$ が存在するための必要十分条件は，$w_{4n} = 0$ が成り立つことである．

---

[6] したがって，定理 6.3 で $w_4 = 0$ は必要条件ではないことに注意せよ．

定理 6.4 (i) で符号数 $\sigma(M^{4n})$ の 8 による整除性が現れるのは Atiyah-Dupont の定理（[6]）に由来する（[23] も併せて参照）.

7. 今後の課題

本稿で論じたように，すでに "secondary Thom polynomial" の概念を一般に定式化する意義を示す状況証拠は揃っている気がする．ここでは主にカスプ特異点や Whitney 傘特異点の「二次 Thom 多項式」に該当するものを求めた．カスプや Whitney の傘以外の特異点の「二次 Thom 多項式」に該当するものはまだ見つかっていない．また，三次以上の高次障害類が本質的に現れる場合があるかどうかも今後の重要な研究課題であろう．([31] で得られた自己交差類の概念とその計算は高次障害類の候補でもある.)

本稿でも少し触れた Sadykov による Chess 予想の解決（[34]）は，次元差が奇数の場合のモラン写像には Thom 多項式以外の障害類が存在しないことを主張している．当然のことかもしれないが，二次 Thom 多項式の方が primary obstruction としての本来の Thom 多項式より幾何学的に豊富な，特に多様体の大域的構造に関わる情報をより多く内包しているように見える．

本稿では，全く触れていないが写像の特異点を消去するための障害は必ずしもコホモロジー類としてだけ定義されるとは限らない．例えば，定理 4.3 より，ほとんどすべての向き付け可能な 4 次元閉多様体 M^4 に対して，折り目写像 $f : M^4 \to \mathbb{R}^3$ は存在するので，折り目写像の存在は 4 次元多様体のホモトピー型でほぼ決まると言ってもよい．そこで，さらにそこに現れる不定値折り目特異点を消去できるかどうかが問題となるが，その障害が 4 次元多様体の微分構造に依存することが分かっている（[20, 第 II 部最終章]）．しかし，その障害がどこに定義されるかは未だわかっていない．

これに関わる問題例を一つだけ述べてみよう：任意のホモトピー 4 球面 Σ^4 上には折り目写像 $f : \Sigma^4 \to \mathbb{R}^3$ が存在する．このとき，定値折り目特異点集合は一つの 2 次元球面，不定値折り目特異点集合が一つの 2 次元トーラスと仮定してよい（と思われる）．そこで，写像を大域的にうまく変形して，トーラスを消し去ることができれば Σ^4 が 4 次元球面 S^4 に微分同相であることがしたがうし，消去できない障害を捉えることができれば異なる微分構造の発見に繋がる[7]．これは Thom 多項式を超えた概念を開発しなければ，捉えられないであろう．筆者は，写像空間 $C^\infty(M^4, \mathbb{R}^3)$ の研究に新しいアイデアを導入する方向性が重要と考えている．

また，佐伯氏による安定写像の特異ファイバーの分類に基づく Vassiliev 型複体の計算（[41]）などは，Thom 多項式が定義域多様体における stratification に関する研究であるのに対して，値域多様体での特異値集合の隣接関係から決まる構造の研究であり，これからの新しい研究の方向であろう．特に，最近の Saeki-Yamamoto による向きづけられた 4 次元閉多様体に対する符号数公式（[44]）は，今後の際だった応用と発展が期待される仕事である．

最後に，写像のコボルディズムの観点から，最近 A. Szücs によって secondary obstruction に関する本稿と類似の例が議論されている（[49] 参照）ことに注意して本稿を閉じることにする．

謝辞（および弁解）．安藤良文氏，佐伯修氏，Rustam Sadykov 氏，Andras Szücs 氏らとの日頃の議論や，彼らからの貴重なコメントが本稿の内容を書くに際して大変役に立ち，それらがここで結実したといえる．あらためて上記四氏に感謝を述べたい．ただし，本稿に誤った記述があれば，それはすべて筆者によるものであり，正月のお屠蘇気分（筆者は酒は嗜まないが）の合間をぬってのやむなきやっつけ仕事とご赦免願いたい．

---

[7] いずれにしても古典的な '超' 難問であることに変わりはないが ·····

REFERENCES

[1] 足立正久, 『埋め込みとはめ込み』(岩波書店), 1984 年.

[2] Y. Ando, *On the elimination of Morin singularities*, J. Math. Soc. Japan **37** (1985), 471–487; Erratum, **39** (1987), 537.

[3] Y. Ando, *On the higher Thom polynomials of Morin singularities*, Publ. RIMS **23** (1987), 195–207.

[4] Y. Ando, *Existence theorems of fold-maps*, Japan. J. Math. (N.S.) **30** (2004), 29–73.

[5] V. I. Arnol'd, V. A. Vasil'ev, V. V. Goryunov and O. V. Lyashko, *Dynamical systems VI: Singularities: local and global theory*, Encyclopaedia Math. Sci., vol. 6, Springer-Verlag, 1993.

[6] M. F. Atiyah and J. L. Dupont, *Vector fields with finite singularities*, Acta Math. **128** (1972), 1–40.

[7] S. Blank and C. Curley, *Desingularizing maps of corank one*, Proc. Amer. Math. Soc. **80** (1980), 483–486.

[8] E. Calabi, *Quasi-surjective mappings and a generalization of Morse theory*, Proc. U.S.-Japan Seminor in Differential Geometry, Kyoto, 1965, pp. 13–16.

[9] D. S. Chess, *A note on the classes* $[S_1^k(f)]$, Proc. Sympo. Pure Math. **40**, Part 1 (Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1983), 221–224.

[10] J. M. Èliašberg, *On singularities of folding type*, Math. USSR Izv. **4** (1970), 1119–1134.

[11] J. M. Èliašberg, *Surgery of singularities of smooth mappings*, Math. USSR Izv. **6** (1972), 1302–1326.

[12] Y. Eliashberg[1)] and N. Mishachev, *Wrinkling of smooth mappings and its applications, I*, Invent. math. **130** (1997), 345–369.

[13] Y. Eliashberg and N. Mishachev, *Wrinkling of smooth mappings and its applications, II. Wrinkling of embeddings and K. Igusa's theorem*, Topology **39** (2000), 711–732.

[14] Y. Eliashberg and N. Mishachev, *Wrinkling of smooth mappings and its applications, III. Foliations of codimension greater than one*, Topol. Methods Nonlinear Analy. **11** (1998), 321–350.

[15] Y. Eliashberg and N. Mishachev, *Introduction to the h-principle*, Grad. Study in Math. vol. 48, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.

[16] 野口広, 福田拓生, 『初等カタストロフィー』(共立出版), 1976 年.

[17] M. Golubitsky and V. Guillemin, *Stable mappings and their singularities*, Grad. Texts in Math., vol. 14, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1973.

[18] M. Gromov, *Partail Differential Relations*, Springer-Verlag, 1986.

[19] A. Haefliger et A. Kosinski, *Un théorème de Thom sur les singularités des applications différentiables*, Séminaire H. Cartan, E. N. S., 1956/57, Exposé no. 8.

[20] 泉屋周一, 佐野貴志, 佐伯修, 佐久間一浩, 『幾何学と特異点』(共立出版), 2001 年.

[21] J. Korbaš and P. Zvengrowski, *The vector field problem: a survey with emphasis on specific manifolds*, Expos. Math. **12** (1994), 3–30.

[22] U. Koschorke, *Vector fields and other vector bundle isomorphisms – A singularity approach*, Springer-Verlag, Lecture Notes in Math., vol. 847, 1981.

[23] H. B. Lawson and M. L. Michelsohn, *Clifford bundles, immersions of manifolds and the vector field problem*, J. Diff. Geom. **15** (1980), 237–267.

[24] H. I. Levine, *Singularities of differentiable mappings*, Springer-Verlag, Lecture Notes in Math., vol. 192, Proceedings of Liverpool Singularities, 1970, pp. 1–89.

[25] H. I. Levine, *Elimination of cusps*, Topology **3** (suppl. 2) (1965), 263–296.

[26] M. Mahowald, *On obstruction theory in orientable fibre bundles*, Trans. Amer. Math. Soc. **110** (1964), 315–349.

[27] J. Mather, *Stability of C^∞ mappings VI, The nice dimensions*, Springer Lecture Notes in Math., vol. 192 (1971), 207–253.

[28] J. Mather, *Homotopy groups and singularities*, Springer Lecture Notes in Math., vol. 197 (1971), 230.

[29] J. Milnor and D. Husemoller, *Symmetric bilinear forms*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete Band 73, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1973.

[30] J. Milnor and J. Stasheff, *Characteristic classes*, Princeton Univ. Press, Ann. of Math Studies vol. 76, 1974. (『特性類講義』佐伯修/佐久間一浩 [訳], シュプリンガー・フェアラーク東京, 2001 年)

[31] T. Ohmoto, O. Saeki and K. Sakuma, *Self-intersection classes for singularities and its applications to fold maps*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), 3825–3838.

[32] I. R. Porteous, *Simple singularities of maps*, Springer-Verlag, Lecture Notes in Math. vol. 192, Proceedings of Liverpool Singularities, 1970, pp. 286–307.

1) J. M. Èliašberg = Y. Eliashberg

[33] D. Randall, *On indices of tangent fields with finite singularities*, Springer-Verlag, Lecture Notes in Math. vol. 1350, Proceedings of the second Topology Symposium in Siegen, 1988, pp. 213–240.
[34] R. Sadykov, *The Chess conjecture*, Algebraic & Geometric Topology **3** (2003), 777–789.
[35] R. Sadykov, *Elimination of singularities of smooth mappings of 4-manifolds into 3-manifolds*, Topology Appl. **144** (2004), 173–199.
[36] R. Sadykov, A note on Morin mappings, preprint.
[37] R. Sadykov, O. Saeki and K. Sakuma, *Obstruction to the existence of fold maps*, 準備中.
[38] O. Saeki, *Notes on the topology of folds*, J. Math. Soc. Japan **44** (1992), 551–566.
[39] O. Saeki, *Constructing generic smooth maps of a manifold into a surface with prescribed singular loci*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **45** (1995), 1135–1162.
[40] O. Saeki, *Fold maps on 4-manifolds*, Comment. Math. Helv. **78** (2003), 627–647.
[41] O. Saeki, *Topology of Singular Fibers of Differentiable Maps*, Springer-Verlag, Lecture Notes in Math., vol. 1854, 2004.
[42] O. Saeki and K. Sakuma, *Stable maps between 4-manifolds and elimination of their singularities*, J. London Math. Soc. **59** (1999), 1117–1133.
[43] O. Saeki and K. Sakuma, *Elimination of singularities: Thom polynomials and beyond*, London Math. Lecture Notes Series vol. 263, Singularity theory– Proceedings of the European Singularities Conference in Honor of C. T. C Wall's 60-th Birthday (ed. by B. Bruce and D Mond), Cambridge Univ. Press, 1999, pp. 291–304.
[44] O. Saeki and T. Yamamoto, *Singular fibers of stable maps and signature of 4-manifolds*, Geometry and Topology (2005), .
[45] Y. Saito, *On decomposable mappings of manifolds*, J. Math. Kyoto Univ. **1** (1961/62), 425–455.
[46] K. Sakuma, *Existence problem for fold maps*, World Scientific より出版予定.
[47] Steenrod and Epstein, *Cohomology operation*, Ann. of Math. Study vol. 50, Princeton Univ. Press, 1962.
[48] R. Stong, *Notes on cobordism theory*, Princeton Univ. Press and Univ. of Tokyo Press, 1968.
[49] A. Szűcs, *Elimination of singularities by cobordism*, Contemporary Math. **354** (2004), 301–324.
[50] 田村一郎, 『微分位相幾何学』(岩波書店), 1992 年.
[51] R. Thom, *Les singularités des applications différentiables*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **6** (1955-56), 43–87.
[52] R. Thom, *Un lemme sur les applications différentiables*, Bol. Soc. Mat. Mexicana 2-nd series, **1** (1956), 59–71.
[53] E. Thomas, *Seminor on fiber spaces*, Springer-Verlag, Lecture Notes in Math., vol. 13, 1966.
[54] E. Thomas, *Postnikov invariants and higer order cohomology operations*, Ann. of Math. **85** (1967), 184–217.
[55] E. Thomas, *Vector fields on low dimensional manifolds*, Math. Z. **103** (1968), 85–93.
[56] G. W. Whitehead, *Elements of Homotopy Theory*, Grad. Texts in Math., vol. 61, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1978.